

О СИММЕТРИИ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В КРУГЕ

А.А. Шум

Симметрия вообще многогранна и многолика, это же относится и к симметрии функций. Так например, функции одной переменной могут быть симметричны в соответствии с традиционными определениями четности и нечетности [1], но могут быть инверсно-симметричны в соответствии с определениями из [2].

В настоящей заметке рассматриваются функции двух переменных, определенные в круге радиуса R с центром в начале координат, и различные виды симметрии таких функций. Поводом для дискуссии служит задача: каким условиям должна удовлетворять функция, определяющая плотность материала плоской пластины, имеющей форму круга, чтобы всякий диаметр этой пластины делил ее на две части одинаковой массы?

Очевидно, что функция, о которой идет речь в задаче, должна быть симметричной, но в каком именно смысле?

Поскольку область определения нашей функции есть круг, будем использовать полярные координаты. Как известно [1], масса пластины равна двойному интегралу от функции плотности, поэтому функция $f(\varphi, \rho)$, о которой говорится в задаче, должна обладать следующим свойством:

$$(s) \quad \text{при любом разбиении исходного круга } S \text{ на два полукруга } S_1 \text{ и } S_2 \\ \text{выполняется равенство } \iint_{S_1} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = \iint_{S_2} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi.$$

Может быть, такая круглая пластина должна иметь центр масс в своем центре?

Из известных формул для вычисления координат центра масс плоской пластины [1] вытекают условия, необходимые и достаточные для того, чтобы рассматриваемая пластина формы круга имела центр масс в центре этого круга:

$$(c) \quad \begin{cases} \iint_S \rho \cos \varphi f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = 0 \\ \iint_S \rho \sin \varphi f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = 0 \end{cases},$$

Разумеется, функция, определяющая плотность, должна быть положительна. Однако, абстрагируясь от условий исходной задачи, мы будем рассматривать произвольную функцию $f(\varphi, \rho)$, определенную в круге радиуса R с центром в начале координат. Об этой функции (чтобы она была однозначной) будем предполагать, что она имеет период 2π , то есть $f(\varphi, \rho) = f(\varphi + 2\pi, \rho)$ для любого φ и любого $\rho \in [0; R]$. Если изначально такая функция определяется только для значений аргумента φ из некоторого промежутка длиной 2π , то предполагается, что она автоматически продолжается до периодической с периодом 2π .

Функцию $f(\varphi, \rho)$ будем называть *s-симметричной*, если она обладает свойством (s), и *c-симметричной*, если она удовлетворяет условиям (c). Как установлено ниже, эти два вида симметрии различны (будут указаны две функции, одна из которых s-симметрична, но не c-симметрична, а другая c-симметрична, но не s-симметрична, и притом обе они неотрицательны и не-прерывны).

Между тем следует вспомнить традиционные определения симметрии функции двух переменных.

Функция $f(\varphi, \rho)$ *радиально-симметрична*, если ее значения не зависят от угла φ , а зависят только от расстояния ρ до начала координат.

Функция $f(\varphi, \rho)$ *осе-симметрична*, если она симметрична относительно обеих осей прямоугольной декартовой системы координат, то есть если для любых значений переменных φ и $\rho \in [0; R]$ выполнены равенства $f(\varphi, \rho) = f(-\varphi, \rho)$ и $f(\varphi, \rho) = f(\pi - \varphi, \rho)$.

Функция $f(\varphi, \rho)$ *центрально-симметрична*, если она симметрична относительно начала координат, то есть если для любых значений переменных φ и $\rho \in [0; R]$ выполнено равенство $f(\varphi, \rho) = f(\varphi + \pi, \rho)$.

Легко проверить, что всякая радиально-симметричная функция будет также и осе-симметричной (но не наоборот), а всякая осе-симметричная функция будет также и центрально-симметричной (но не наоборот). Нетрудно убедиться, что всякая центрально-симметричная функция будет также s -симметричной и c -симметричной, а тот факт, что обратные утверждения не выполнены, устанавливают следующие ниже леммы 1 и 2.

Через S_α будем обозначать круговой сектор, определяемый условием $0 \leq \varphi \leq \alpha$.

Функцию $f(\varphi, \rho)$ назовем k -симметричной, если имеется постоянный коэффициент k , такой, что $\iint_{S_\alpha} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = k\alpha$ для любого угла $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Очевидно, что для k -симметричной функции двойной интеграл по любому сектору с углом α будет пропорционален углу α , поэтому всякая k -симметричная функция является также и s -симметричной.

Лемма 1. Функция $f_1(\varphi, \rho) = \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} (\rho \sin \frac{\varphi}{2} + \rho - \rho^2)$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

и $0 \leq \rho \leq 1$, в круге радиуса $R = 1$ является k -симметричной, но не c -симметричной.

Доказательство

$$\begin{aligned} & \text{Функция } f_1(\varphi, \rho) \text{ является } k\text{-симметричной, так как } \iint_{S_\alpha} f_1(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \iint_{S_\alpha} \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} (\rho \sin \frac{\varphi}{2} + \rho - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \int_0^\alpha \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 \sin \frac{\varphi}{2} + \rho^2 - \rho^3) d\rho = \\ &= \int_0^\alpha \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \int_0^\alpha \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \left[\frac{1}{3} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] d\varphi = \int_0^\alpha d\varphi = \alpha. \end{aligned}$$

Коэффициент пропорциональности k в данном случае равен 1.

Докажем теперь, что функция $f_1(\varphi, \rho)$ не является c -симметричной.

$$\begin{aligned} & \iint_s \rho \cos \varphi f_1(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = \iint_s \rho \cos \varphi \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} (\rho \sin \frac{\varphi}{2} + \rho - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{12 \cos \varphi}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 \sin \frac{\varphi}{2} + \rho^3 - \rho^4) d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{12 \cos \varphi}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \left[\frac{\rho^4}{4} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{12 \cos \varphi}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) d\varphi = \frac{3}{5} \int_0^{2\pi} \frac{5 \sin \frac{\varphi}{2} + 1}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \cos \varphi d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\varphi}{2} \\ \varphi = 2x \\ d\varphi = 2dx \end{array} \right\} = \\
&= \frac{6}{5} \int_0^{\pi} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx = \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx + \frac{6}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \pi - x \\ x = \pi - t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \\
&= \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx + \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin t + 1}{4 \sin t + 1} \cos 2t dt = \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx = \\
&= \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx + \frac{12}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ x = \frac{\pi}{2} - t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx - \\
&- \frac{12}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 1}{4 \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + 1} \cos(\pi - 2t) dt = \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} \cos 2x dx - \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \cos t + 1}{4 \cos t + 1} \cos 2t dt = \\
&= \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5 \sin x + 1}{4 \sin x + 1} - \frac{5 \cos x + 1}{4 \cos x + 1} \right) \cos 2x dx = \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(4 \sin x + 1)(4 \cos x + 1)} \cos 2x dx.
\end{aligned}$$

Поскольку при $x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right)$ подынтегральная функция меньше нуля, то и сам интеграл меньше нуля, а это значит, что первое из двух условий (с) не выполнено и потому функция $f_1(\varphi, \rho)$ не является c -симметричной (центр масс, хотя и лежит на горизонтальной оси, поскольку функция $f_1(\varphi, \rho)$ симметрична относительно этой оси, но сдвинут вдоль нее влево).

Доказанная лемма доставляет пример функции, которая в круге радиуса $R = 1$ является s -симметричной, но не является ни радиально-симметричной, ни осе-симметричной, ни центрально-симметричной, ни c -симметричной. Отметим, что эта функция является в рассматриваемом круге также непрерывной и неотрицательной.

Лемма 2. Функция $f_2(\varphi, \rho) = \begin{cases} \rho \sin \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -2\rho^5 \sin \varphi & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ в круге радиуса $R = 1$

является c -симметричной, но не s -симметричной.

Доказательство

Поскольку $f_2(\varphi, \rho) = f_2(\pi - \varphi, \rho)$, то функция $f_2(\varphi, \rho)$ симметрична относительно вертикальной оси, и потому легко установить, что первое из двух условий (с) выполнено (абсцисса центра масс равна нулю). Проверим выполнение второго условия.

$$\iint_S \rho \sin \varphi f_2(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sin \varphi \rho \sin \varphi \rho d\rho - \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sin \varphi 2\rho^5 \sin \varphi \rho d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 2\rho^7 d\rho = \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 d\varphi - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \varphi \left[\frac{\rho^8}{8} \right]_0^1 d\varphi = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{4} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \begin{cases} t = \varphi - \pi \\ \varphi = t + \pi \\ d\varphi = dt \end{cases} = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $f_2(\varphi, \rho)$ c -симметрична. Для того чтобы показать, что эта функция не является s -симметричной, разделим круг S на два полукруга, S_1 и S_2 , диаметром, лежащим на горизонтальной оси, тогда

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} f_2(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi &= \iint_{S_1} \rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \left[-\frac{1}{3} \cos \varphi \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}, \\
\iint_{S_2} f_2(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi &= -\iint_{S_2} 2\rho^5 \sin \varphi \rho d\rho d\varphi = -2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho = -2 \left[-\frac{1}{7} \cos \varphi \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

Поскольку эти два интеграла имеют разные значения, то функция $f_2(\varphi, \rho)$ не является s -симметричной.

Доказанная лемма доставляет пример функции, которая в круге радиуса $R = 1$ является c -симметричной, но не является ни радиально-симметричной, ни осе-симметричной, ни центрально-симметричной, ни s -симметричной. Отметим, что эта функция в рассматриваемом круге также непрерывна и неотрицательна.

Следующая лемма предоставляет критерии k -симметричности и s -симметричности.

Лемма 3. Пусть функция $f(\varphi, \rho)$ непрерывна в круге радиуса R и $F(\varphi) = \int_0^R f(\varphi, \rho) \rho d\rho$, тогда

а) функция $f(\varphi, \rho)$ является k -симметричной тогда и только тогда, когда функция $F(\varphi)$ является постоянной;

б) функция $f(\varphi, \rho)$ является s -симметричной тогда и только тогда, когда функция $F(\varphi)$ является периодической с периодом π .

Доказательство утверждения а

Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = \iint_{S_{\alpha}} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi$. Очевидно, что

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^R f(\varphi, \rho) \rho d\rho = \int_0^{\alpha} F(\varphi) d\varphi. \quad (1)$$

В силу известной [1] теоремы о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу

$$\Phi'(\alpha) = F(\alpha). \quad (2)$$

Если функция $f(\varphi, \rho)$ k -симметрична, то $\Phi(\alpha) = k\alpha$, а потому $\Phi'(\alpha) = k$, и в силу соотношения (2) функция $F(\varphi)$ является постоянной. Обратное очевидно из соотношения (1).

Доказательство утверждения б

Обозначим через S_α половину рассматриваемого круга S , определяемую условием $\alpha \leq \varphi \leq \alpha + \pi$, и рассмотрим функцию $G(\alpha) = \iint_{S_\alpha} f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi$:

$$G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} d\varphi \int_0^R f(\varphi, \rho) \rho d\rho = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} F(\varphi) d\varphi = \int_0^{\alpha+\pi} F(\varphi) d\varphi - \int_0^{\alpha} F(\varphi) d\varphi = \Phi(\alpha + \pi) - \Phi(\alpha).$$

Как следует из соотношения (2):

$$G'(\alpha) = F(\alpha + \pi) - F(\alpha). \quad (3)$$

Очевидно, что функция $f(\varphi, \rho)$ является s -симметричной, в том и только том случае, когда $G(\alpha) = \frac{1}{2} \iint_S f(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi = const$. Следовательно

(в силу теоремы о производной постоянной функции [1]) функция $f(\varphi, \rho)$ является s -симметричной тогда и только тогда, когда $G'(\alpha) = 0$. Поскольку в силу (3) последнее условие равносильно тому, что $F(\alpha + \pi) = F(\alpha)$ при любом значении угла α , то утверждение \bar{b} , а вместе с ним и лемма полностью, доказаны.

При помощи критерия a леммы 3 можно подтвердить k -симметричность функции $f_1(\varphi, \rho)$ из леммы 1, вычислив функцию

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= \int_0^1 f_1(\varphi, \rho) \rho d\rho = \int_0^1 \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} (\rho \sin \frac{\varphi}{2} + \rho - \rho^2) \rho d\rho = \\ &= \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \int_0^1 (\rho^2 \sin \frac{\varphi}{2} + \rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{12}{4 \sin \frac{\varphi}{2} + 1} \left[\frac{1}{3} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{12} \right] = 1 = const. \end{aligned}$$

Тот факт, что функция $f_2(\varphi, \rho)$ из леммы 2 не является s -симметричной, можно подтвердить при помощи критерия \bar{b} :

$$F_2(\varphi) = \int_0^1 f_2(\varphi, \rho) \rho d\rho = \begin{cases} \int_0^1 \rho \sin \varphi \rho d\rho = \sin \varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \sin \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -\int_0^1 2\rho^5 \sin \varphi \rho d\rho = -2 \sin \varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho = -\frac{2}{7} \sin \varphi & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Эта функция не является периодической с периодом π , поскольку $F_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$, в то время как $F_2(\frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{7}$.

Библиографический список

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т. 1. 671 с.
2. Лесничевская, И.А. О свойствах инверсно-симметричных функций / И.А. Лесничевская, А.А. Шум // Интеграция науки и образования – производству и экономике: сборник трудов межрегиональной научно-технической конференции, посвященной 90-летию основания ТвГТУ. Т. 2, с. 23. Тверь, 2012.